NOTICE

SUR LES

TRAVAUX MATHÉMATIQUES

DE

M. MANNHEIM,

CHEF D'ESCADRONS D'ARTILLERIE, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

(A L'APPUI DE SA CANDIDATURE A L'ACADÉMIE DES SCIENCES.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1875

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX MATHÉMATIQUES

DE

M. MANNHEIM,

CHEF D'ESCADRONS D'ARTILLERIE.

Entré à l'École Polytechnique en........................	1848
Nommé répétiteur à l'École Polytechnique en.............	1859
Nommé Membre de la Société Philomathique en..........	1860
Nommé examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique en..	1863
Nommé professeur à l'École Polytechnique en.............	1864
A obtenu le prix Poncelet (¹) en.	1872

APERÇU SOMMAIRE DES TRAVAUX ANALYSÉS DANS CETTE NOTICE.

Cet aperçu renferme surtout l'énumération des questions nouvelles que j'ai traitées et l'indication des éléments nouveaux que j'ai introduits dans la Science.

Mes recherches sur la théorie des polaires réciproques ont eu pour objet de compléter cette théorie due au général Poncelet (*voir*, dans cette Notice, les nos **1**, **2**, **16**).

Parmi diverses applications de la transformation par rayons vecteurs réciproques, je citerai l'étude de la *cyclide* (de Dupin) (**9**). La marche suivie dans ce travail a été adoptée par M. Bertrand dans son *Traité de Calcul différentiel.*

(¹) Ce prix est « destiné à récompenser l'ouvrage le plus utile aux progrès des sciences mathématiques pures ou appliquées ».

Dans la transformation par rayons vecteurs réciproques, j'ai pris pour pôle de transformation un point particulier, au moyen duquel on peut transformer une courbe en elle-même, et que j'ai appelé *pôle principal*. J'ai fait connaître quelques propriétés générales des *pôles principaux* (**10**). Ces recherches sur la cyclide et sur les pôles principaux ont donné lieu au travail de M. Moutard sur les anallagmatiques du quatrième ordre.

La construction géométrique du centre de courbure d'un assez grand nombre de courbes a été, à plusieurs reprises, le sujet de mes recherches (**3, 4, 5, 6, 7, 15**) [1].

On connaissait peu de théorèmes sur les arcs de courbes : j'en ai trouvé un certain nombre (**13, 14**). L'idée de considérer les arcs de courbes planes ou sphériques comme enveloppes de cercles était, je crois, nouvelle au moment où mon Mémoire a paru.

Dans l'*Étude du déplacement* d'un corps solide, j'ai, le premier, supposé le corps mobile soumis à des conditions géométriques *très-variées et diverses* [2]. Ce Mémoire renferme une nouvelle méthode des normales qui se prête à différents développements, et permet de construire aussi les plans normaux aux trajectoires décrites, les plans tangents aux surfaces engendrées, l'axe du déplacement, etc. (**17, 18, 20, 36, 44**) (*voir* les conclusions d'un Rapport à l'Académie, p. 18).

Cette étude a été en partie introduite dans l'enseignement, en France et à l'étranger.

Le premier aussi, j'ai considéré une figure dont le déplacement n'est pas complétement défini, c'est-à-dire qui est assujettie à moins de cinq conditions. La question qui se présentait d'abord était l'étude d'une figure de forme invariable dont le déplacement est soumis à quatre conditions. Ce travail, qui a pris depuis lors un « grand développement [3] », débute par un théorème, généralisation de cette proposition bien connue de Géométrie plane : *Les normales aux trajectoires des points d'un plan passent par un point fixe, centre instantané de rotation.*

Ce théorème, qui est fondamental, s'énonce ainsi : *Les normales aux sur-*

---

[1] Voir, p. 14, une Note du Général Poncelet.

[2] On n'avait pourtant pas méconnu l'importance d'un pareil sujet d'étude, car les théorèmes dus à M. Chasles et énoncés dans un travail inséré dans les *Comptes rendus*, en 1843, ont été démontrés par plusieurs géomètres; mais je ne sache pas qu'on ait rien ajouté d'essentiel à ce travail, jusqu'au moment où, en 1866, il est devenu le point de départ de mes recherches sur le déplacement.

[3] *Voir* page 27.

faces trajectoires des points d'un corps rencontrent toutes deux certaines droites, axes simultanés de rotation ([1]). Aux lignes trajectoires de la proposition de Géométrie plane correspondent ici des surfaces trajectoires, et au centre instantané deux axes simultanés de rotation; ces deux axes jouent un rôle très-important dans toute cette étude ([2]) (**18, 20, 26, 37, 38**) (*voir* les conclusions d'un Rapport à l'Académie, p. 28).

Parmi diverses applications que j'ai faites de cette proposition importante, je citerai la détermination de la direction des lignes de courbure de la surface de l'onde et la construction des centres de courbure principaux de cette surface (**19**), problèmes qui n'avaient pas encore été résolus.

Cette correspondance remarquable entre le centre instantané de rotation et un système de deux axes de rotation m'a conduit plus tard à signaler dans l'espace deux certaines droites, que j'ai appelées *droites de courbure*, comme jouant un rôle analogue à celui du centre de courbure d'une ligne plane.

De là la possibilité, comme je l'ai montré, d'établir une *théorie géométrique du contact des surfaces* (**31**). Depuis les travaux de Cauchy et de Dupin cette théorie n'avait guère fait de progrès.

Dans mon *Étude sur le déplacement*, j'ai appelé l'attention sur la surface, lieu d'une série de normales à une surface donnée, que j'ai nommée *normalie*. L'utilité des normalies ressort de plusieurs de mes Communications (**19, 20, 21, 24, 28, 29, 31, 33, 34, 35, 39, 41, 42, 46**). M. Ribaucour en a déjà fait aussi plusieurs fois usage.

Les propriétés des normalies et quelques théorèmes sur le déplacement des figures, employés concurremment, m'ont permis de résoudre certains problèmes dont la solution paraissait réservée à la méthode analytique. Je veux parler des questions qui nécessitent l'emploi d'infiniment petits du troisième ordre, comme : déterminer le rayon de courbure de la développée d'une section plane faite dans une surface; déterminer le plan osculateur en un point de la courbe de contact d'une surface et d'un cône qui lui est circonscrit, etc., etc. (**45, 46, 47**). Ces questions n'avaient encore été abordées, je crois, ni géométriquement, ni analytiquement.

Après le problème des normales est venu se placer naturellement le pro-

---

([1]) J'ai énoncé pour la première fois ce théorème en 1866.

([2]) Depuis la publication de mes travaux, MM. Ribaucour et Halphen se sont aussi occupés du déplacement d'un corps assujetti à moins de cinq conditions.

blème plus difficile de la recherche des éléments de courbure des lignes décrites pendant le déplacement d'un corps. A ce sujet, j'ai montré qu'il existe une droite au moyen de laquelle on peut déterminer les plans osculateurs et les rayons de courbure des trajectoires des points d'une droite mobile. Les axes de courbure des développables enveloppes des plans d'un faisceau mobile se construisent aussi au moyen d'une certaine droite (**22, 23**). Ces résultats, que j'ai seulement énoncés, sont des applications de formules, encore *inédites*, relatives à la déformation des figures polyédrales de *forme variable*. Indépendamment de ces constructions, j'ai fait connaître de nombreuses propriétés générales relatives à la courbure des lignes ou surfaces trajectoires (**36, 37, 38**).

L'emploi des droites que j'ai appelées *axes de courbure* m'a permis de trouver plusieurs généralisations du théorème de Meusnier (**28**); l'une d'elles conduit à la construction de la sphère osculatrice en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces (**45**). On n'avait encore déterminé que le plan osculateur en un point de cette courbe.

Pendant que les points d'un corps décrivent autour de leurs positions initiales des éléments de leurs surfaces trajectoires, les droites entraînées engendrent des pinceaux. Hamilton et Kummer ont étudié analytiquement les pinceaux; j'en ai fait une étude purement géométrique. Pour cela, j'ai imaginé de représenter chacune des *surfaces élémentaires* d'un pinceau par une droite que j'ai appelée *droite auxiliaire*. L'étude du pinceau des normales à une surface m'a conduit à une *nouvelle théorie géométrique de la courbure des surfaces* (**33**).

J'ai utilisé la *droite auxiliaire* non-seulement dans l'étude des pinceaux (**33, 34**), mais aussi pour trouver les nombreuses propriétés de deux courbes qui ont les mêmes normales principales, et de la surface formée par les normales (**35**).

En faisant usage d'une simple propriété relative au déplacement d'un dièdre droit, j'ai pu trouver géométriquement la liaison qui existe entre les droites de courbure des nappes de la développée d'une surface (**29**) [1].

Depuis, j'ai donné, géométriquement aussi, deux relations analytiques entre les éléments qui fixent la position de ces droites (**47**). Ces relations nouvelles viennent d'être démontrées analytiquement par M. Halphen.

[1] M. Ribaucourt, par ses procédés analytiques, a montré aussi que cette liaison s'exprime au moyen d'un paraboloïde hyperbolique.

Je termine ici ce très-sommaire exposé, par lequel je ne puis espérer avoir fait ressortir tout l'intérêt que présentent, tant en elles-mêmes qu'au point de vue de leur application à la théorie des surfaces, les propriétés relatives au déplacement d'un corps solide. On pourra remarquer cependant que la plupart de mes derniers travaux, liés entre eux par l'unité d'objet et de méthode, forment, dès à présent, une branche particulière de la Géométrie.

L'emploi systématique des propriétés relatives au déplacement d'un solide, pour l'étude intime des surfaces, me paraît constituer une véritable méthode. Cette méthode, on pourrait la rattacher aux procédés géométriques en usage parmi les géomètres du XVII[e] siècle : Descartes, Roberval, Maclaurin, etc., etc., procédés dont l'invention du Calcul infinitésimal amena, pour un temps, l'abandon presque complet.

Ce me serait un grand honneur d'avoir, en fournissant des preuves nombreuses de leur puissance, contribué, pour ma part, à faire renaître ces précieux moyens d'investigation et de démonstration, au commun avantage de la Géométrie et de l'Analyse, naturellement solidaires dans leurs progrès.

TRAVAUX MATHÉMATIQUES.

1. *Note sur la théorie des polaires réciproques.*

(Feuilles autographiées. Metz, 1851.)

Cette Note se termine par une première tentative de transformation des relations métriques des figures.

2. *Transformation des propriétés métriques des figures à l'aide de la théorie des polaires réciproques.*

(Brochure in-8. Paris, 1857.)

Ce travail renferme la solution des deux questions suivantes :

1° Transformer, à l'aide de la théorie des polaires réciproques, une relation métrique sans lui faire subir aucune préparation;

2° Déterminer immédiatement les différentes formes sous lesquelles se seraient présentées les relations transformées, si l'on avait opéré sur différentes formes de la relation donnée.

Ilcon tient les applications suivantes :

1° Transformation de la distance d'uu point à une droite;

2° Transformation du carré de l'hypoténuse;

3° Transformation de l'identité $ab + bc = ac$, a, b, c étant trois points en ligne droite;

4° Transformation du rapport $\frac{ab}{bc}$, a, b, c étant en ligne droite : cette application conduit à des formules nouvelles du rapport anharmonique de quatre points;

5° Transformation du système de coordonnées de Descartes;

6° Transformation de démonstrations.

Il renferme un exemple de transformation de démonstration analytique et un exemple de transformation de démonstration géométrique.

Enfin ce travail contient des formules au moyen desquelles on transforme l'aire d'un triangle ou le volume d'un tétraèdre. Depuis sa publication, j'ai donné de nouveaux exemples de transformation de relations métriques (**16**).

---

5. *Construction de la tangente, du point de contact d'une droite avec son enveloppe pour certains lieux géométriques. Applications à la détermination du centre de courbure des coniques.*

(Nouvelles Annales de Mathématiques, 1re série, t. XVI; 1857.)

Sur une droite mobile de longueur variable je construis des triangles semblables à un triangle donné, et je détermine la tangente à la courbe lieu des sommets de ces triangles. Comme cas particulier, je cherche la tangente à la courbe lieu des points qui partagent, dans un rapport constant, un segment de longueur variable d'une droite mobile. Inversement, je construis le point où une droite touche son enveloppe, lorsque cette droite se déplace de telle façon que trois courbes données la partagent en segments proportionnels à des segments donnés.

Ces constructions permettent d'obtenir de plusieurs manières le centre de courbure d'une conique. On trouve que le centre de courbure de la courbe enveloppe d'une droite qui détache d'une courbe donnée un segment d'aire constante s'obtient ainsi : des extrémités de la droite on élève des normales à la courbe donnée; ces droites interceptent, sur la normale à la courbe enveloppe, un segment dont le milieu est le point cherché.

4. *Construction du centre de courbure de la courbe lieu des points dont les distances à deux courbes données sont dans un rapport constant.*

(Annali di Matematica di Tortolini, t. I, p. 364; 1858.)

Après avoir trouvé plusieurs constructions élégantes, je les applique aux coniques, à l'ovale de Descartes et aux caustiques par réfraction.

---

5. *Construction des centres de courbure des lignes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan.*

(Journal de l'École Polytechnique, XXXVII, 1858.)

Une première solution est basée sur l'existence de deux circonférences, dont l'une est le lieu des points du plan mobile qui décrivent des courbes dont les centres de courbure sont à l'infini.

Dans la deuxième solution je fais usage de la formule de Savary, et je retrouve une construction due à Bobillier. Ce travail est terminé par le théorème suivant :

Lorsqu'une conique roule sur une courbe, le lieu des centres de courbure des éléments décrits simultanément par tous les points de cette conique est une conique tangente à la première, au centre instantané de rotation.

---

6. *Note sur la Géométrie infinitésimale.*

(Annali di Matematica, t. II, p. 208; 1859.)

Cette Note renferme plusieurs théorèmes intéressants de Géométrie infinitésimale. On y trouve aussi la construction du centre de courbure de la courbe que l'on obtient en divisant, dans un rapport constant, les ordonnées d'une courbe donnée. Certains théorèmes de cette Note ont été reproduits par Bour dans son *Traité de Cinématique.* (*Voir* p. 46-60.)

---

7. *Construction du centre de courbure de l'épicycloïde.*

(Nouvelles Annales de Mathématiques, 1re série, t. XVIII, p. 371; 1859.)

Cette construction s'obtient en appliquant les résultats d'un travail précédent (5). Cette Note est terminée par cette proposition : *Lorsqu'une chaînette roule sur une droite, sa base passe par un point fixe.*

---

8. *Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite.*

(Journal de Mathématiques, 2e série, t. IV, p. 93 ; 1859.)

Je fais voir que ce lieu est une droite lorsque la courbe qui roule est une spirale logarithmique, une parabole lorsqu'on fait rouler une développante de cercle, une circonférence lorsqu'il s'agit d'une cycloïde, une ellipse dans le cas d'une épicycloïde ordinaire, et enfin une parabole lorsqu'on fait rouler une chaînette.

---

9. *Application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude de la surface enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères données.*

(Nouvelles Annales de Mathématiques, 1re série, t. XIX ; 1860.)

M. Dupin a donné le nom de *cyclide* à cette surface, et l'a étudiée dans ses *Applications de Géométrie.*

J'arrive très-rapidement à des propriétés connues de cette surface et à d'autres nouvelles, après avoir montré qu'elle provient de la transformation d'un tore par rayons vecteurs réciproques. C'est ainsi qu'en transformant ce théorème de M. Yvon Villarceau : *Un plan doublement tangent à un tore coupe cette surface suivant deux circonférences*, j'obtiens le théo-

rème suivant : *Toute sphère doublement tangente à une cyclide coupe cette surface suivant deux circonférences.*

---

10. *Sur les pôles principaux.*

(Bulletin de la Société Philomathique, 15 décembre 1860.)

J'ai appelé *pôle principal,* dans la transformation par rayons vecteurs réciproques, un point qui, pris comme pôle de transformation, permet de transformer une courbe en elle-même.

Parmi les théorèmes énoncés dans cette Note, je citerai le suivant : *Lorsqu'une courbe admet un pôle principal, il en est de même de sa transformée par rayons vecteurs réciproques, obtenue par rapport à un pôle quelconque pris dans son plan.*

On a un théorème analogue lorsque l'on considère une surface ayant un pôle principal.

---

11. *Application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude des anticaustiques.*

(Bulletin de la Société Philomathique, 22 décembre 1860.)

Lorsque des rayons émanés d'un point sont réfléchis par une courbe, ils enveloppent, après cette réflexion, une caustique par réflexion. Jacques Bernoulli a désigné sous le nom d'*anticaustique* une certaine trajectoire orthogonale de ces rayons réfléchis. J'ai adopté cette expression d'anticaustique en l'étendant au cas de la réfraction. Les anticaustiques ne sont autres que les caustiques secondaires de Quetelet.

Parmi les théorèmes renfermés dans ce travail, je citerai le suivant :

L'anticaustique N *d'une courbe* M *pour un point lumineux* f *et un indice* l *a pour anticaustique, pour le même point lumineux et l'indice* $-$ l, *une courbe semblable à* M. *Le point* f *est le centre de similitude, et le rapport de similitude est* $\frac{l^2-1}{l^2}$.

Comme conséquence, on retrouve cette propriété connue :
La caustique secondaire du cercle est une ovale de Descartes.

---

12. *Sur les polygones plans inscrits et circonscrits.*

(Applications d'Analyse et de Géométrie ; Poncelet, 1862.)

Cette Note renferme l'alinéa suivant :

« On arrive très-facilement à la construction de la normale à la courbe décrite par le sommet libre d'un polygone que l'on déforme d'un mouvement continu ; on est ramené, pour résoudre ce problème, à chercher une droite, issue du sommet libre, telle que les segments comptés sur cette ligne à partir de ce point, et limités à deux droites connues, soient dans un rapport déterminé. Une construction inverse permet de déterminer le point où l'un des côtés du polygone touche son enveloppe. Enfin, si l'on remarque que la construction linéaire qui sert à déterminer la normale à la courbe décrite par un sommet libre nous donne cette normale comme le côté d'un certain polygone, qui lui-même se déforme pendant le mouvement continu de la figure donnée, on peut chercher, toujours par des constructions linéaires, le point où cette normale touche son enveloppe, c'est-à-dire le centre de courbure de la courbe décrite par le sommet libre du premier polygone. »

Il suffirait de développer ces quelques lignes pour trouver la construction du centre de courbure des lignes décrites pendant le déplacement d'une figure polygonale de forme variable [1].

Je citerai seulement ce théorème, où il y a une indétermination curieuse :

Lorsqu'un polygone d'un nombre pair de côtés est inscrit à une conique et que tous ses côtés moins un pivotent autour de points fixes, le côté demeuré libre touche son enveloppe au point autour duquel pivoterait ce dernier côté, si les sommets du polygone parcouraient des droites convergentes en un point quelconque.

---

[1] On peut retrouver ainsi la solution de la question suivante, que j'ai communiquée à la Société Philomathique (5 mai 1860) :

Un polygone se déplace dans son plan en restant semblable à lui-même. On donne les centres de courbure de la courbe enveloppe d'un des côtés et des courbes décrites par les extrémités de ce côté. On demande le centre de courbure de la ligne décrite par un sommet quelconque du polygone, ainsi que celui de la courbe enveloppe d'un des côtés.

13. *Des arcs des courbes planes ou sphériques considérés comme enveloppes de cercles.*

(Journal de Mathématiques, 2e série, t. VII; 1862.)

Je montre que la différence des deux arcs enveloppes d'une suite de circonférences est égale à $\int 2l\,d\omega$, l étant le rayon d'une de ces circonférences variables de grandeur, et $d\omega$ l'angle de contingence de la courbe enveloppe des cordes de contact de ces circonférences. On trouve immédiatement cette formule en considérant le déplacement d'un segment de droite de longueur variable, qui coupe sous des angles égaux les lignes décrites par les extrémités de ce segment. Au moyen de cette formule je démontre que :

La différence des arcs correspondants d'une anticaustique complète relative à un point lumineux est exprimable en arcs de la podaire de la ligne dirimante prise par rapport à ce point lumineux.

Comme l'anticaustique complète d'un cercle est une ovale de Descartes, et que les arcs de la podaire d'un point par rapport à un cercle sont exprimables en arcs d'ellipse, on retrouve ainsi géométriquement un théorème auquel M. Roberts était arrivé par le calcul.

Après avoir donné d'autres applications de cette même formule, je l'étends au cas des figures sphériques en introduisant un angle de contingence géodésique. Cette extension m'a permis d'énoncer le théorème suivant, qui est remarquable parce que chacun des arcs qui entre dans son énoncé serait exprimé analytiquement par une transcendante compliquée :

De tous les points d'une ellipse sphérique comme pôles on décrit des petits cercles dont les rayons sphériques ont des sinus proportionnels aux sinus des distances sphériques de leurs pôles à l'un des foyers de l'ellipse sphérique : la différence des arcs correspondants de la courbe enveloppe de ces cercles est exprimable en arc de cercle.

---

14. *Recherches géométriques sur les longueurs comparées d'arcs de courbes différentes.*

(Journal de l'École Polytechnique, XL, p. 205; 1863.)

Ce Mémoire renferme un grand nombre de généralisations de ce théorème de Steiner :

Lorsqu'un arc de courbe plane roule sur une droite, un point quelconque de son plan, entraîné dans le mouvement, décrit un arc égal en longueur à l'arc de podaire que l'on obtient en projetant le point décrivant sur les tangentes à l'arc mobile.

Parmi ces généralisations je citerai :

Si l'on fait rouler sur un plan la portion d'une surface développable comprise entre deux génératrices (A) *et* (A'), *un point* B *de l'espace, entraîné pendant ce mouvement, décrit un arc* (B) *égal en longueur à l'arc* (P), *lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point* B *sur les plans tangents qui touchent la développable entre* (A) *et* (A').

Je généralise le théorème de Steiner sur la sphère, et je trouve comme conséquence que :

La courbe décrite par le foyer d'une ellipse sphérique, pendant le roulement de cette courbe sur un grand cercle, a ses arcs exprimables en arcs de cercles.

---

15. *Addition au deuxième Cahier des Applications d'Analyse et de Géométrie du général Poncelet* (¹).

(T. II ; mars 1863.)

Dans cette Note, je donne l'expression du rapport des rayons de courbure en deux points quelconques B et C d'une courbe du troisième ordre en fonction des tangentes à la courbe issues des points B et C et limitées à leur point de rencontre, et de segments comptés sur la droite BC. Je donne aussi plusieurs expressions du rapport des rayons de courbure en un point double d'une courbe du troisième ordre, et je démontre ce théorème :

(¹) A la page 117 de ce Volume, le général Poncelet annonce ainsi cette Note :

« M. Mannheim, dont les recherches origineles, relatives aux rayons de courbure en des points » divers des lignes géométriques, sont aujourd'hui bien appréciées, et qui a eu l'obligeance de » relire les manuscrits de ce Volume avant leur impression, m'a remis sur ce même sujet une » Note qu'on trouvera à la fin du premier Cahier, et dont l'élégante simplicité m'a paru méri- » ter assez l'attention des lecteurs de cet Ouvrage pour y trouver place, au risque de lui faire » perdre beaucoup par les comparaisons si l'on venait à oublier les différences des dates et le » développement récent des idées géométriques. »

Lorsqu'une courbe du troisième ordre est à la fois inscrite et circonscrite à un triangle ABC, *le produit des rayons de courbure correspondant aux sommets* A, B, C *est égal au cube du rayon du cercle circonscrit au triangle* ABC.

16. *Transformation par polaires réciproques des propriétés relatives aux rayons de courbure.*

(Journal de Mathématiques, 2e série, t. XI; 1866.)

Ce Mémoire, complément du travail analysé au n° 2 de cette Notice, contient des formules de transformation du rayon de courbure d'une courbe quelconque et diverses applications.

Par exemple, en transformant, au moyen de ces formules, la relation d'Euler relative aux rayons de courbure des sections faites dans une surface par des plans passant par une même normale à cette surface, on trouve une relation entre les rayons de courbure des sections faites dans une surface par des plans passant par une droite oblique.

Une Communication que j'ai faite à la Société Philomathique, dans la séance du 24 février 1866, contient de nouvelles applications des formules renfermées dans ce Mémoire.

17. *Sur le déplacement d'un corps solide.*

(Comptes rendus; 25 juin 1866.)

Dans ce travail, je cherche une liaison entre les normales aux trajectoires des points du corps et l'axe instantané de rotation et de glissement. Je montre que cet axe n'intervient que par sa direction et qu'il ne joue pas dans l'espace un rôle analogue au centre instantané de rotation sur le plan.

18. *Sur le déplacement d'un corps solide.*

(Journal de Mathématiques, 2e série, t. XI; 1866.)

Après avoir reproduit la Note précédente, j'énonce pour la première fois ce théorème important :

Lorsqu'un corps solide n'est assujetti qu'à quatre conditions, ses points se déplacent sur des surfaces; à un instant quelconque, les normales à toutes ces surfaces s'appuient sur deux mêmes droites.

---

19. *Construction géométrique, pour un point de la surface des ondes, des centres de courbure principaux et des directions des lignes de courbure.*

(Comptes rendus; 28 janvier 1867 et 11 février 1867.)

La surface des ondes dont il est question ici est celle de Fresnel. Elle a été l'objet des recherches de plusieurs géomètres. Mac-Cullagh et Plücker sont arrivés à la construction de la normale en un point de cette surface. Après avoir retrouvé cette construction, je donne, ce qui offrait plus de difficultés, la direction des lignes de courbure et les centres de courbure principaux de cette surface. Dans une première solution, je fais usage de différentes propriétés du déplacement d'une figure dans l'espace. Une deuxième solution résulte de l'emploi du théorème énoncé dans la Note précédente. Quand on sait les difficultés qu'ont eues Fresnel, Ampère, Cauchy, pour établir l'équation de la surface des ondes, il est digne de remarque que la Géométrie, avec ses seules ressources, m'ait permis de résoudre le problème qui fait l'objet de ce travail.

---

20. *Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable.*

(Recueil des Mémoires des Savants étrangers, t. XX, et Journal de l'École Polytechnique, 43e Cahier.)

Ce Mémoire est divisé en deux Chapitres, eux-mêmes partagés en paragraphes.

Voici les titres des paragraphes du Chapitre Ier :

§ 1. *Introduction.*

§ 2. *Propriétés géométriques du déplacement infiniment petit d'un corps solide libre.*

§ 3. *Il faut cinq conditions pour déterminer le déplacement d'une figure de forme invariable.*

§ 4. *Réduction du problème au cas où l'on a cinq points assujettis à rester sur cinq surfaces données.*

§ 5. *Nouvelle méthode des normales.*

Je résous les problèmes suivants :

Problème I. — *Cinq points d'une figure de forme invariable sont assujettis à se déplacer sur cinq surfaces données; construire à un instant quelconque :*

1° *Le plan normal à la trajectoire d'un point quelconque de la figure mobile;*

2° *La normale en un point de la surface engendrée par une courbe quelconque;*

3° *La ligne suivant laquelle une surface entraînée pendant le déplacement touche son enveloppe;*

4° *L'axe du déplacement de la figure mobile;*

5° *Le pas réduit des hélices infiniment petites décrites.*

Problème II. — *Quatre points d'une figure de forme invariable sont assujettis à se déplacer sur quatre surfaces données; construire à un instant quelconque :*

1° *La normale à la surface trajectoire d'un point entraîné;*

2° *Le point où une surface entraînée touche la surface lieu de ses intersections successives.*

La solution de ce problème conduit au théorème déjà signalé (**18**), et que j'énonce ainsi :

Lorsqu'une figure de forme invariable se déplace en restant assujettie à quatre conditions, à un instant quelconque, les normales, issues de tous les points entraînés, aux surfaces trajectoires de ces points, rencontrent les deux mêmes droites.

Je termine ce paragraphe en considérant une figure simplement assujettie à trois conditions. Je démontre la propriété suivante :

Lorsqu'une figure de forme invariable est assujettie pendant son déplacement à trois conditions distinctes, à un instant quelconque, on peut diriger arbitrairement un point quelconque lié à la figure mobile, à l'exception de tous les points d'un certain hyperboloïde, qui admettent des surfaces trajectoires.

Le Chapitre II contient des applications des résultats obtenus dans le Chapitre Ier.

Le § 1 est intitulé : *Sur le déplacement d'une droite*.

Il renferme des constructions relatives aux surfaces réglées. Je fais usage, dans ce paragraphe, des surfaces que j'appelle *normalies* [1].

Le § II a pour titre : *Sur le déplacement d'un dièdre*.

Le § III est intitulé : *Sur le déplacement de quelques trièdres particuliers*.

Le § IV a pour titre : *Sur le déplacement d'une surface assujettie à des conditions multiples*.

Enfin le dernier paragraphe : *Sur l'héliçoïde réglé*, renferme les constructions du plan tangent en un point de cette surface et de la courbe d'ombre pour le cas des rayons parallèles entre eux..

Ce Mémoire, déjà entré en partie dans l'enseignement, a été l'objet d'un Rapport lu à l'Académie le 23 mars 1868.

Voici les conclusions de ce Rapport [2] :

« L'étude des déplacements que peut prendre un corps soumis à moins » de cinq conditions n'avait pas encore fixé l'attention des géomètres, et, » à cet égard, elle constitue un progrès dans la marche naturelle de la » science. Les applications que l'habile professeur a faites de ses résultats » à de nombreuses questions concernant la théorie des lignes et des sur- » faces courbes, dont on ne possédait point encore de solutions, donnent » une importance très-marquée à son travail, que nous sommes heureux » de signaler avec confiance à l'attention particulière des géomètres, et » dont nous avons l'honneur de proposer à l'Académie l'insertion dans le » *Recueil des Savants étrangers*. »

21. *Quelques résultats obtenus par la considération du déplacement infiniment petit d'une surface algébrique.*

(Comptes rendus; 9 mai 1870.)

Je détermine, par exemple, le nombre des normales à une surface qui rencontrent deux droites; le nombre des normales qu'on peut abaisser d'un point sur une surface; le degré de la normalie à une surface dont les génératrices s'appuient sur une courbe donnée, etc.

[1] J'appelle *normalie* une surface qui est le lieu d'une série de normales à une surface donnée. Plusieurs géomètres ont depuis fait usage de cette expression.

[2] Commissaires : MM. Bertrand, Bonnet, Chasles rapporteur.

22. *Détermination du plan osculateur et du rayon de courbure de la trajectoire d'un point quelconque d'une droite que l'on déplace en l'assujettissant à certaines conditions.*

(Comptes rendus; 6 juin 1870.)

La droite que l'on déplace est assujettie à avoir, soit deux de ses points sur deux courbes données, soit un point sur une courbe et deux points sur deux surfaces données, soit quatre de ses points sur quatre surfaces données.

Je montre l'existence d'une droite qui permet de construire les plans osculateurs et les rayons de courbure des trajectoires des points de la droite mobile.

Pour arriver aux résultats énoncés dans cette Note, j'ai employé des formules encore *inédites*, qui sont relatives au déplacement d'une figure polyédrale de *forme variable*.

23. *Construction de l'axe de courbure de la surface développable enveloppe d'un plan dont le déplacement est assujetti à certaines conditions.*

(Comptes rendus; 13 juin 1870.)

Je considère d'abord des plans, parallèles à une même droite, formant une figure de grandeur invariable, et je montre qu'il existe une droite au moyen de laquelle on peut déterminer les axes de courbure des surfaces développables enveloppes de ces plans; puis je donne la solution du problème suivant :

Quatre plans parallèles à une même droite G *formant une figure de grandeur invariable se déplacent en touchant respectivement quatre surfaces données; construire, à un instant quelconque, l'axe de courbure de la développable enveloppe d'un plan invariablement lié aux premiers et qui est aussi parallèle à* G.

24. *Démonstration géométrique d'un théorème dû à M. O. Bonnet.*

(Bulletin de la Société Philomathique ; 25 novembre 1871.)

Voici l'énoncé de ce théorème, que je démontre géométriquement d'une façon très-simple :

Lorsque, à partir d'un point a, *on prend sur une surface* (A) *des courbes ayant entre elles un contact de l'ordre* n, *les normalies qui ont ces courbes pour directrices ont entre elles un contact de l'ordre* (n + 1) *aux centres de courbure principaux situés sur la normale* A *en* a *à la surface* (A).

---

25. *Démonstration géométrique d'une propriété de la transformation par rayons vecteurs réciproques.*

(Journal de Mathématiques, 2e série, t. XVI; 1871.)

Cette Note a pour objet la démonstration géométrique de cette propriété importante que l'on doit à M. Liouville :

« Au moyen d'une seule transformation on peut obtenir le résultat de » transformations successives. »

---

26. *Propriétés relatives aux déplacements infiniment petits d'un corps lorsque ces déplacements ne sont définis que par quatre conditions.*

(Comptes rendus ; 6 novembre 1871.)

Voici les propriétés démontrées dans cette Note :

Les points qui, pour tous les déplacements infiniment petits de la figure, à partir d'une même position initiale, décrivent toujours les mêmes éléments de lignes, sont ceux des droites D *et* Δ *qui sont les deux axes simultanés de rotation au moyen desquels on peut obtenir ces déplacements.*

Les droites qui, pour tous les déplacements de la figure mobile, à partir de leurs positions initiales, engendrent des éléments de surfaces tangentes entre elles, sont les lignes de striction des paraboloïdes qui contiennent D *et* Δ, *et dont un plan directeur est parallèle à la perpendiculaire commune à ces droites. Ces droites forment un conoïde droit du troisième ordre.*

Les plans qui, à partir de leurs positions initiales, se déplacent sans cesser de contenir chacun une certaine droite du plan mobile, sont les plans menés perpendiculairement à l'une ou à l'autre des droites D *ou* Δ.

---

27. *Détermination simple et rapide d'une équation des surfaces du second ordre contenant six points donnés.*

(Bulletin des Sciences, t. II; 1871.)

Si l'on joint deux points d'une conique à quatre points quelconques de cette courbe, on obtient toujours deux faisceaux homographiques. Je me suis proposé de chercher une propriété analogue relative aux surfaces du second ordre. Prenons sur une surface du second ordre trois points o, o', o'' et quatre points a, b, c, m. Par la droite oo' et chacun de ces derniers points faisons passer des plans; de même pour la droite $o'o''$ et la droite oo''. Nous aurons ainsi trois faisceaux de plans. Si nous imaginons que les trois plans qui contiennent un point mobile m de la surface soient seuls variables, nous pourrons fixer la position de ces plans au moyen de rapports anharmoniques r, r', r'' comptés de la même manière.

On a entre r, r', r'' une relation de la forme

$$Brr' + Crr'' + Dr'r'' + Er + Fr' + Gr'' = o,$$

dans laquelle la somme des coefficients est nulle et qui doit être vérifiée pour les valeurs de r, r', r'' correspondant à l'un des points de la surface situé dans le plan $oo'o''$. Cette équation est alors l'équation des surfaces du second ordre qui contiennent les six points o, o', o'', a, b, c.

---

28. *Généralisations du théorème de Meusnier.*

(Comptes rendus; 5 février 1872.)

J'énonce ainsi le théorème de Meusnier :

Lorsque des courbes tracées sur une surface ont entre elles un contact du premier ordre en un point a, *les axes de courbure de ces courbes qui correspondent à ce point passent par un même point* α.

Après avoir démontré ce théorème, je démontre les théorèmes suivants :

Lorsque des courbes tracées sur une surface ont entre elles un contact du premier ordre en un point a, *les développables circonscrites le long de ces courbes ont pour axes de courbure correspondant à ce point des droites passant par un même point* β.

Lorsque des courbes tracées sur une surface ont entre elles un contact de second ordre, les axes de courbure de leurs surfaces polaires passent par un même point.

Lorsque par le cercle osculateur en a *d'une courbe tracée sur une surface* (S) *on fait passer des sphères, celles-ci coupent* (S) *suivant des courbes dont on obtient les centres de courbure de leurs développées sphériques en projetant un point fixe* β *sur ces sphères.*

Lorsque des courbes tracées sur une surface ont entre elles un contact du $n^{ième}$ *ordre, leurs* $(n-1)^{ièmes}$ *polaires ont pour axes de courbure des droites passant par un même point.*

---

29. *Détermination de la liaison géométrique qui existe entre les éléments de la courbure des deux nappes de la surface des centres de courbure principaux d'une surface donnée.*

(Comptes rendus; 12 février 1872.)

Cette liaison s'exprime géométriquement au moyen d'un paraboloïde hyperbolique. On peut alors résoudre un certain nombre de questions qui n'avaient pas encore été abordées. Par exemple :

On donne les axes des lignes de courbure qui passent en un point d'une surface et les plans des sections principales des nappes de la développée de cette surface : construire les centres de courbure principaux de ces nappes.

---

30. *Exposition sommaire d'une théorie géométrique de la courbure des surfaces.*

(Comptes rendus; 26 février 1872.)

a est un point d'une surface (S) et A la normale en ce point. Les nappes de la développée de (S) touchent cette normale aux centres de courbure

principaux b et c. Les normales à ces nappes issues de ces points sont les droites B et C que j'ai appelées depuis *droites de courbure* de (S). Après l'exposition de la théorie de la courbure de (S) autour de a, déduite d'un théorème sur le déplacement, je termine en faisant remarquer que les droites de courbure B et C peuvent être substituées à l'indicatrice de Dupin pour le point a.

---

31. *Recherches géométriques sur le contact du troisième ordre de deux surfaces.*

(Comptes rendus ; 18 et 25 mars 1872.)

Depuis les travaux de Dupin la théorie du contact des surfaces n'a guère fait de progrès. Les recherches géométriques et analytiques sur ce sujet ont été poursuivies dans la voie même adoptée par Dupin et qui avait permis à ce géomètre d'étudier d'une façon si lumineuse ce qui concerne le contact du second ordre. Cette marche est analogue au procédé qui consiste, pour une courbe plane, à substituer à cette courbe en un de ses points une courbe simple qui lui est osculatrice.

Pour les courbes planes on fait usage aussi des développées successives et de leurs centres de courbure. C'est l'extension de ce procédé au cas de l'espace que j'ai inauguré dans ce travail. J'introduis pour cela d'une façon systématique les deux *droites de courbure* (30) dont l'ensemble constitue dans l'espace un élément analogue au centre de courbure des courbes planes.

La voie que je suis a sur celle qu'avait adoptée Dupin l'avantage que, tandis que cet illustre géomètre, dans l'étude du contact des surfaces, devait faire usage successivement de courbes dont le degré allait en croissant, je n'ai que de nouveaux couples de droites à introduire.

Parmi les théorèmes démontrés dans ce travail je citerai seulement :

Les centres de courbure des développées de toutes les sections faites dans une surface par des plans passant par une même tangente à cette surface, et qui correspondent au point de contact de cette tangente, sont sur une ellipse.

Si, aux centres de courbure principaux communs à deux surfaces (S) *et* (S') *qui passent par le même point a, les nappes des développées de ces surfaces sont osculatrices entre elles, les surfaces* (S) *et* (S') *ont, au point a, un contact du troisième ordre.*

Lorsqu'en un point a deux surfaces (S) *et* (S') *ont des lignes de courbure*

ayant entre elles un contact du troisième ordre, les surfaces (S) *et* (S′) *ont entre elles en ce point un contact de ce même ordre* [1].

32. *Remarques sur une classe générale de surfaces, et en particulier sur la surface lieu des points dont la somme des distances à deux droites fixes est constante.*

(Bulletin des Sciences mathématiques, t. III, 1872.)

Je montre comment on peut construire la direction des lignes de courbure et les centres de courbure principaux de ces surfaces.

33. *Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces.*

(Journal de Mathématiques, 2e série, t. XVII, 1872.)

Dans ce Mémoire, pour étudier un pinceau, je considère les éléments de surfaces gauches, formés respectivement par une droite du pinceau, et chacune des droites infiniment voisines. Ces surfaces que j'appelle *élémentaires* sont représentées par de simples lignes droites, *droites auxiliaires*. Dans le cas d'un pinceau de normales, ces surfaces élémentaires sont des éléments de normalies.

Dans le § I, intitulé *Notions préliminaires*, je construis la droite auxiliaire correspondant à un élément de surface gauche, et je montre son emploi pour les constructions relatives aux plans tangents de cette surface.

Le § II est intitulé *Pinceaux de droites*. Je démontre ce théorème nouveau extrêmement utile pour trouver les nombreuses propriétés d'un pinceau :

Si, dans un plan passant par un rayon d'un pinceau, on porte sur des perpendiculaires à ce rayon élevées des points centraux des surfaces élémentaires, et à partir de ces points des longueurs égales aux paramètres de distribution des plans tangents [2] *de ces surfaces, les extrémités des longueurs ainsi portées sont sur une circonférence passant par les foyers du rayon.*

[1] M. Ribaucourt a donné une démonstration analytique de ce théorème.

[2] Le paramètre de distribution des plans tangents à une surface réglée aux différents points d'une génératrice de cette surface est le rapport entre la plus courte distance de cette génératrice à la génératrice infiniment voisine et l'angle que font entre elles ces droites.

Dans le § III, j'étudie les *normalies*. C'est ce paragraphe qui renferme une théorie géométrique de la courbure des surfaces. Parmi les théorèmes, je citerai celui-ci :

Lorsque la directrice d'une normalie est une ligne asymptotique d'une surface, le produit des rayons de courbure principaux de cette normalie en chaque point de sa directrice est égal au produit analogue pour la surface au même point.

A la fin de ce paragraphe, je donne des propriétés relatives à des normalies considérées simultanément. Ainsi, par exemple :

Deux normalies quelconques sont toujours telles que le plan central de l'une touche l'autre au point où le plan central de celle-ci touche la première.

Pour deux normalies rectangulaires au point de rencontre de leurs directrices, le produit des rayons de courbure principaux de ces surfaces est le même en ce point.

---

34. *Démonstration géométrique d'une proposition due à M. Bertrand.*

(Journal de Mathématiques, 2e série, t. XVII; 1872.)

Dans une *Note sur la théorie des normales à une surface* [1], M. Bertrand a généralisé une proposition qui lui est due, en établissant une relation entre les positions de deux normales à une surface menées aux extrémités de deux arcs infiniment petits égaux, tracés sur cette surface à partir d'un point.

Je montre comment on arrive à cette relation en faisant usage du mode de représentation des normalies que j'ai fait connaître dans mon *Mémoire sur les pinceaux de droites.*

---

35. *Sur la surface gauche lieu des normales principales de deux courbes.*

(Journal de Mathématiques, 2e série, t. XVII; 1872.)

M. Bertrand a donné [2] la relation qui doit exister entre les deux rayons de courbure d'une courbe pour que les normales principales de cette courbe soient en même temps les normales principales d'une autre courbe.

---

[1] *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XII, p. 343.

[2] *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XV, p. 332.

Dans ce travail, j'établis très-simplement cette relation en faisant usage de la *droite auxiliaire*.

En outre, après avoir démontré une propriété de la surface gauche dont les génératrices sont les normales principales de deux courbes, j'étends à cette surface toutes les propriétés dont jouit un pinceau quelconque de droites.

Voici quelques-uns des théorèmes nouveaux renfermés dans ce Mémoire :

Le produit des rayons de seconde courbure de deux courbes qui ont les mêmes normales principales pour les points situés sur une même normale est constant, quelle que soit cette normale.

Les points où deux courbes ayant les mêmes normales principales rencontrent une de leurs normales et les centres de courbure de ces courbes situés sur cette normale déterminent quatre points dont le rapport anharmonique est constant, quelle que soit la normale considérée.

Les points centraux pour les différentes génératrices de la surface formée par les normales principales de deux courbes n'occupent qu'une région limitée de cette surface.

---

36. *Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace.*

(Comptes rendus; 3 et 10 mars 1873, et Bulletin de la Société mathématique de France.)

Voici quelques théorèmes intéressants extraits de ce travail :

A un instant quelconque du déplacement d'une droite, les plans osculateurs des trajectoires des points de cette droite enveloppent une surface développable du quatrième ordre et de la troisième classe dont le cône directeur est du second ordre.

La surface formée par les normales principales des trajectoires de tous les points d'une droite est une surface du quatrième ordre qui possède une droite triple.

Le lieu des centres de courbure des trajectoires de tous les points d'une droite est une courbe du cinquième ordre.

Lorsque quatre points d'une droite mobile restent sur quatre plans donnés, un point quelconque de cette droite décrit une conique, et la droite mobile engendre une surface du quatrième ordre dont le cône directeur est de révolution.

Certains théorèmes sont énoncés en employant le langage de la Cinématique; on a ainsi :

Dans un corps solide en mouvement, les points pour lesquels la suraccélération binormale est nulle sont sur une surface du troisième ordre.

---

37. *Sur les surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions.*

(Recueil des Savants étrangers, t. XXII.)

Une Commission, composée de MM. Bertrand, Bonnet, Chasles rapporteur, a fait sur ce Mémoire, dans la séance du 6 octobre 1873, un Rapport dont voici quelques extraits :

« Dans un précédent travail, intitulé *Étude sur le déplacement d'une figure* » *de forme invariable*, inséré dans le *Recueil des Mémoires des Savants étran-* » *gers*, M. Mannheim a traité diverses questions concernant la construction » des normales aux trajectoires des points d'une figure qui éprouve dans » l'espace un déplacement complétement déterminé, c'est-à-dire dans le- » quel chaque point de la figure ne peut prendre qu'une direction. Ce » Mémoire contient, en outre, des recherches relatives à une figure dont » le déplacement n'est pas complétement défini, sujet qui n'avait pas en- » core été abordé et qui devait prendre, comme on va le voir, un grand » développement, etc., etc.

» . . . .

« Puis M. Mannheim cherche combien il y a de points sur une droite » qui décrivent des trajectoires satisfaisant à diverses conditions, rela- » tives aux *surfaces trajectoires* de ces points.

» Ainsi il détermine :

» 1° Combien il y a de points sur une droite, dont les trajectoires soient » tangentes aux lignes asymptotiques des surfaces trajectoires de ces points;

» 2° Combien dont les trajectoires soient osculatrices aux lignes géodé- » siques des surfaces trajectoires, et dont les plans osculateurs dès lors » soient normaux aux surfaces trajectoires;

» 3° Combien dont les trajectoires ont leur rayon de courbure nul;

» 4° Combien dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure » principal nul;

» 5° Combien dont les trajectoires sont tangentes aux lignes de courbure » des surfaces trajectoires;

» 6° Combien dont les surfaces trajectoires ont un rayon de courbure » principal infini;

» 7° Combien dont les surfaces trajectoires ont leurs rayons de courbure » principaux égaux;

» 8° Enfin combien dont les surfaces trajectoires ont leurs rayons de » courbure principaux égaux et de signes contraires.

» Considérant les trajectoires, non plus simplement des points d'une » droite, mais de tous les points de la figure en mouvement, M. Mannheim » parvient à divers théorèmes qui étendent ce vaste sujet de recherches.

» Il nous faut citer ses résultats principaux pour donner une idée de la » nouveauté et de l'importance qu'ils comportent.

» *Le lieu des points dont les trajectoires, dans un quelconque des déplace-* » *ments que permettent quatre conditions données, sont tangentes à des li-* » *gnes asymptotiques des surfaces trajectoires de ces points est une surface du* » *troisième ordre qui contient les deux droites* D *et* Δ, etc., etc.

. . . .

» Les géomètres comprendront, sans que nous ayons besoin d'insister, » toute l'importance d'un travail qui réunit dans une même théorie abso- » lument nouvelle, en les déduisant d'un mode uniforme de démonstration, » des résultats aussi précis et aussi considérables. Nous ne saurions le » recommander trop vivement aux encouragements de l'Académie, et la » Commission déclare, à l'unanimité, que ce Mémoire lui paraît très-digne » d'être inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*.

» Les conclusions de ce Rapport sont adoptées. »

De ce Mémoire j'ai extrait les deux Communications suivantes faites au Congrès de Lyon en 1873 :

La première a pour titre : *Deux théorèmes d'une nature paradoxale.*

La deuxième est intitulée : *Les normales aux surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable rencontrent toutes deux mêmes droites. Démonstration nouvelle de ce théorème.*

---

38. *Quelques théorèmes montrant l'analogie qui existe entre les propriétés relatives aux surfaces décrites par les points d'une droite et les surfaces touchées par les plans d'un faisceau mobile.*

(Congrès de Lyon; 1873.)

Voici quelques-uns des théorèmes relatifs aux surfaces touchées par les plans d'un faisceau mobile qui sont analogues aux théorèmes démontrés

dans le Mémoire précédent, et qui concernaient les surfaces trajectoires des points d'une droite :

Les surfaces auxquelles restent tangents les plans d'un faisceau mobile ont pour normales des droites appartenant à un paraboloïde hyperbolique.

Les axes de courbure des développables enveloppes des plans d'un faisceau R *appartiennent à un hyperboloïde qui contient l'adjointe au plan perpendiculaire à l'arête* R *de ce faisceau.*

Les plans A, B, C,... *d'un faisceau* R *touchent, à un instant quelconque, en* a, b, c,... *les surfaces* (A), (B), (C),..., *auxquelles ces plans restent tangents pendant les déplacements du faisceau. Pour un déplacement arbitraire du faisceau* R, *on prend les courbes de contours apparents des surfaces* (A), (B), (C),... *projetées orthogonalement sur des plans menés par* a, b, c *perpendiculairement aux caractéristiques des plans* A, B, C,...; *les centres de courbure de ces courbes appartiennent à une cubique gauche.*

Les surfaces auxquelles les plans d'un faisceau restent tangents pendant les déplacements de ce faisceau ont leurs centres de courbure principaux sur une courbe gauche du sixième ordre.

---

39. *Démonstration géométrique de quelques théorèmes, au moyen de la considération d'une rotation infiniment petite.*

(Comptes rendus; 2 mars 1874.)

Je démontre de cette façon quelques théorèmes parmi lesquels :

Si une conique d'une surface du deuxième ordre (S) *est telle que les normales à cette surface issues de trois de ses points se coupent en un même point, il y a de même une infinité d'autres groupes analogues de trois normales à* (S), *et les points de rencontre de ces normales sont sur une même droite* Δ [1]. *La droite* Δ *est bitangente à la développée de la surface* (S) [2].

---

40. *Deux théorèmes nouveaux sur la surface de l'onde.*

(Comptes rendus; 23 mars 1874.)

Ces théorèmes sont relatifs à des points quelconques et à des plans tangents quelconques de la surface de l'onde. On en déduit l'existence des points singuliers et des plans tangents singuliers de la surface de l'onde.

[1] M. Desboves.

[2] M. Laguerre.

41. *Construction directe du centre de courbure en un point de la section faite dans une surface par un plan quelconque.*

(Comptes rendus; 6 avril 1874.)

On donne, pour un point a d'une surface (S), *les plans des sections principales de cette surface, et les centres de courbure principaux b et c, situés sur la normale* A *en a à* (S). *On demande de construire le centre de courbure de la section* E *faite dans* (S) *par un plan quelconque* (P) *passant en a.*

Sans recourir à la relation d'Euler et au théorème de Meusnier, en faisant simplement usage d'une propriété des normalies, je réponds à cette question par cette construction élégante : Par le centre de courbure principal *b* on mène un plan perpendiculaire à (P) et parallèle à la tangente *at* à E. Ce plan coupe le plan tangent en *b* à la développée de (S), c'est-à-dire le plan d'une section principale de cette surface, suivant une droite B'. De même, pour le centre de courbure principal *c*, on obtient une droite C'. En joignant les traces de B' et de C' sur (P), on a une droite qui coupe la normale en *a* à E au centre de courbure cherché.

---

42. *Construction directe du rayon de courbure de la courbe de contour apparent d'une surface qu'on projette orthogonalement sur un plan.*

(Comptes rendus; 27 avril 1874.)

Sur un plan (Q) *on projette une surface* (S). *On demande de construire au point a' le rayon de courbure de la courbe de contour apparent ainsi obtenue, connaissant pour le point a de* (S), *dont a' est la projection, les centres de courbure principaux b et c et les plans des sections principales de cette surface.*

A ma connaissance, on ne s'était pas encore proposé ce problème. Voici la construction à laquelle j'arrive simplement : aux points *b* et *c* on mène les axes de courbure des sections principales; on prend les traces de ces droites sur le plan (Q) : la droite qui joint ces traces contient le centre de courbure cherché.

Cette construction donne immédiatement la relation

$$r = R_1 \sin^2\omega + R_2 \cos^2\omega,$$

qui permet de calculer le rayon de courbure de la courbe de contour appa-

rent, connaissant les rayons de courbure principaux R_1, R_2 et l'angle ω que fait une perpendiculaire à (Q) avec le grand axe de l'indicatrice de (S) en a.

On déduit de cette relation, ou de la construction même, diverses conséquences, parmi lesquelles je citerai :

Lorsque le plan de projection (Q) *est parallèle à la normale en a à* (S) *et à l'une des asymptotes de l'indicatrice de cette surface en ce point, le rayon de courbure de la courbe de contour apparent de* (S) *est égal à la différence des rayons de courbure principaux de cette surface pour le point a.*

Lorsqu'on projette (S) au moyen d'un cône circonscrit, la construction précédente conduit encore à la solution, en vertu de cette remarque :

Un cône et un cylindre circonscrits à une surface, qui ont une génératrice commune, sont osculateurs entre eux au point où cette génératrice touche la surface.

---

43. *Sur la surface de l'onde.*

(Congrès de Lille; 1874.)

La surface de l'onde étant définie par ses plans tangents, je construis le point où l'un de ces plans touche la surface. Au moyen de cette construction j'étudie les singularités de la surface de l'onde, et je démontre les deux théorèmes mentionnés précédemment.

---

44. *Propriétés relatives à un faisceau de plans qui est mobile.*

(Congrès de Lille; 1874.)

Voici quelques-unes des propriétés démontrées dans ce travail :

Les caractéristiques des plans d'un faisceau mobile touchent leurs enveloppes en des points qui forment une cubique gauche.

A un instant quelconque du déplacement d'un faisceau de plans de forme invariable, les centres des sphères osculatrices des lignes de courbure des surfaces développables enveloppes des plans de ce faisceau sont sur une cubique gauche.

---

45. *Construction de la sphère osculatrice en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces données.*

(Bulletin de la Société Mathématique ; 1874.)

En faisant usage du théorème de Meusnier, on savait construire le plan osculateur en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces. L'une des généralisations de ce théorème auxquelles je suis parvenu (28) conduit très-simplement à la solution du problème plus difficile qui consiste à construire la sphère osculatrice en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces.

---

46. *Détermination des relations analytiques qui existent entre les éléments de courbure des deux nappes de la développée d'une surface.*

(Comptes rendus ; 7 décembre 1874.)

R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux en un point a d'une surface (S);

r_1 et r_2 les rayons de courbure principaux de la nappe (B) de la développée de cette surface, qui correspondent au centre de courbure principal b de (S);

De même t_1 et t_2 pour la nappe (C);

R′ et R″ sont les rayons de courbure des courbes de contour apparent des nappes (C) et (B) projetées orthogonalement sur le plan tangent en a à (S);

β et γ sont les angles que les grands axes des indicatrices de (B) et de (C) aux points b et c font avec la normale A à (S) au point a.

On a les relations

$$\frac{R'}{R''} = \frac{-2(R_1 - R_2)}{\sin 2\beta (r_1 - r_2)},$$

$$\frac{R''}{R'} = \frac{2(R_1 - R_2)}{\sin 2\gamma (t_1 - t_2)}.$$

On déduit de là que

$$4(R_1 - R_2)^2 + (r_1 - r_2)(t_1 - t_2)\sin 2\beta \sin 2\gamma = 0.$$

---

47. *Solutions géométriques de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces et qui dépendent des infiniment petits du troisième ordre.*

(Société Philomathique, séance du 27 juin 1874, et Comptes rendus, mars 1875.)

En faisant usage de normalies, j'ai montré comment on pouvait construire : 1° le rayon de courbure d'une section plane d'une surface (**41**); 2° le rayon de courbure de la courbe de contour apparent d'une surface (**42**).

Dans le travail actuel, pour résoudre des questions plus difficiles qu'on n'avait pas encore abordées, j'emploie encore des normalies. Je définis ce qui est relatif aux éléments du troisième ordre autour d'un point en me donnant les droites de courbure des nappes de la développée de cette surfaces, ces droites satisfaisant du reste à certaines conditions connues.

Je résous alors les problèmes suivants :

Construire les tangentes aux courbes de contact d'une normalie à une surface avec les nappes de la développée de cette surface.

Construire les asymptotes des indicatrices d'une normalie à une surface.

Construire le plan osculateur en un point de la courbe de contact d'une surface et d'un cylindre ou d'un cône qui lui est circonscrit.

Construire le rayon de courbure de la développée d'une section quelconque faite dans une surface.

En 1851, j'ai modifié l'ancienne règle à calculs et j'en ai inventé une nouvelle à *échelles repliées*. Le principe de cette règle a été appliqué aussi sur une règle cylindrique dont le modèle est exposé dans les galeries du Conservatoire des Arts et Métiers. Ce modèle de 13cm,50 de longueur permet d'obtenir le produit de deux nombres avec la même approximation qu'une ancienne règle ordinaire de 2 mètres de longueur. Sur le Rapport de M. Mathieu, ces règles m'ont valu une mention honorable à l'Exposition universelle de 1855. La règle à calculs, telle que je l'ai modifiée, adoptée à l'École d'Application de l'Artillerie et du Génie, est aujourd'hui répandue dans divers pays ; l'instruction pour l'emploi de cette règle a été traduite en différentes langues. Une instruction spéciale a été publiée en allemand. Quintino Sella, dans sa « Théorie et pratique de la règle à calculs, » consacre plusieurs pages à mes intruments.

J'ai donné, en 1857, au Conservatoire des Arts et Métiers le modèle d'un vernier de vernier.
Pour mesurer une longueur à 1 centième près, le vernier ordinaire porte 100 divisions ; dans le système que j'ai inventé, j'emploie deux verniers portant chacun 10 divisions seulement.

(*Comptes rendus*, t. LXXV, p. 1495 ; 1872. — *Journal de Physique*, 1874.)

1914 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER, QUAI DES AUGUSTINS, 55.